Probabilidad en Experimentos de Extracción: Urnas, Eventos Compuestos y Análisis Condicional

Este documento desarrolla los principios esenciales de la teoría de probabilidad a través del estudio de experimentos de extracción aleatoria, el análisis de distribuciones en tablas de contingencia y la aplicación de la probabilidad condicional en situaciones de clasificación y diagnóstico. Se presentan con detalle los conceptos de espacio muestral, eventos compuestos, unión e intersección de eventos, y se trabajan casos prácticos orientados a consolidar la comprensión operativa de cada fórmula. El contenido está organizado de manera progresiva, partiendo de los fundamentos teóricos hasta llegar a problemas de aplicación real, todos con datos genéricos que preservan el rigor matemático sin referencias identificables.

Sección 1: El Experimento Aleatorio y el Espacio Muestral

1.1 Naturaleza de los Experimentos Aleatorios

Un experimento aleatorio es toda aquella acción o proceso cuyo resultado no puede determinarse con certeza antes de llevarse a cabo, aunque sí es posible describir el conjunto completo de resultados posibles. La característica definitoria de este tipo de experimento es la variabilidad: ante condiciones aparentemente idénticas, el resultado puede cambiar de una repetición a otra.

Algunos ejemplos clásicos de experimentos aleatorios incluyen el lanzamiento de monedas o dados, la extracción de piezas de un lote de producción, la selección de individuos de una población para una encuesta, y el registro del estado de componentes en un sistema. En todos estos casos, aunque no se puede predecir el resultado exacto, sí es posible construir un modelo matemático que describa las probabilidades de los distintos resultados posibles.

> El espacio muestral S de un experimento aleatorio es el conjunto de todos sus resultados posibles. Cada elemento de S se denomina punto muestral o resultado elemental.

 Nota aclaratoria: La elección de cómo definir el espacio muestral depende del nivel de detalle que se requiera para el análisis. Por ejemplo, al extraer una pelota de una urna, el espacio muestral podría definirse en términos del color de la pelota, de su número, o de ambos atributos a la vez, según lo que se quiera estudiar.

1.2 Clasificación de los Espacios Muestrales

Los espacios muestrales pueden ser de dos tipos principales:

Tipo	Descripción	Ejemplo
Discreto finito	Número limitado de resultados posibles	Extraer una pelota de una urna con 10 pelotas
Discreto infinito	Los resultados son contables pero no tienen límite	Número de lanzamientos hasta obtener cara
Continuo	Los resultados forman un intervalo en los reales	Tiempo exacto de espera en una cola

En este documento se trabajará principalmente con espacios muestrales discretos finitos, que son los más comunes en los problemas introductorios de probabilidad y permiten aplicar directamente la definición clásica.

 Curiosidad: La primera formulación matemática rigurosa de los espacios de probabilidad fue desarrollada por Andréi Kolmogórov en 1933 en su obra "Fundamentos de la Teoría de la Probabilidad". Antes de ese trabajo, la probabilidad se estudiaba de manera más intuitiva, sin una base axiomática sólida.

1.3 Eventos y sus Relaciones

Un **evento** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Los eventos son los objetos a los que se asignan probabilidades. Dependiendo de cómo se relacionen entre sí dos eventos A y B, se tienen distintas operaciones:

- **Unión (A ∪ B):** Ocurre A, o ocurre B, o ambos.
- **Intersección (A ∩ B):** Ocurren A y B simultáneamente.
- **Complemento (A'):** No ocurre A.
- **Diferencia (A - B):** Ocurre A pero no B.

Para cualquier par de eventos A y B dentro del espacio muestral S, se cumple siempre:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Esta fórmula, conocida como la **regla de adición general**, es una de las herramientas más utilizadas en el cálculo de probabilidades y aplica sin excepción, ya sea que los eventos sean o no mutuamente excluyentes.

 Ejemplo práctico: Supóngase que en un grupo de 50 estudiantes, 30 aprobaron el examen de matemáticas y 25 aprobaron el de física, y que 15 aprobaron ambos. La probabilidad de que un estudiante elegido al azar haya aprobado al menos una de las dos materias es: $P(M \cup F) = 30/50 + 25/50 - 15/50 = 40/50 = 0.80$.

Sección 2: Experimento de Extracción de Pelotas de una Urna

2.1 Descripción del Experimento

Considérese una urna que contiene pelotas numeradas del 1 al 10, todas del mismo tamaño y peso, de modo que la extracción de cualquiera de ellas es igualmente probable. El experimento consiste en extraer una pelota al azar y registrar su número.

El espacio muestral de este experimento es:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

con un total de 10 resultados equiprobables, cada uno con probabilidad $1/10 = 0.10$.

2.2 Análisis de Eventos Simples y Compuestos

Se definen los siguientes eventos de interés:

- **A** = { Obtener un número par } = {2, 4, 6, 8, 10}
- **B** = { Obtener un número mayor que 6 } = {7, 8, 9, 10}
- **C** = { Obtener un número múltiplo de 3 } = {3, 6, 9}

A partir de estas definiciones, se pueden calcular todas las probabilidades individuales y compuestas:

Evento	Elementos	Cardinalidad	Probabilidad
A	{2, 4, 6, 8, 10}	5	5/10 = 1/2
B	{7, 8, 9, 10}	4	4/10 = 2/5
C	{3, 6, 9}	3	3/10
A ∩ B	{8, 10}	2	2/10 = 1/5
A ∩ C	{6}	1	1/10
B ∩ C	{9}	1	1/10
A ∩ B ∩ C	{}	0	0

 Nota aclaratoria: El hecho de que A ∩ B ∩ C sea el conjunto vacío significa que no existe ningún número en {1,...,10} que sea simultáneamente par, mayor que 6 y múltiplo de 3. El 12 cumpliría las tres condiciones, pero está fuera del rango. Esto ilustra que la intersección de eventos puede ser el evento imposible.

2.3 Cálculo de Uniones con la Regla de Adición

Probabilidad de A ∪ B (par o mayor que 6):

P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B) = 5/10 + 4/10 - 2/10 = **7/10 = 0.70**

Verificación directa: A ∪ B = {2, 4, 6, 7, 8, 9, 10} → 7 elementos ✓

Probabilidad de A ∪ C (par o múltiplo de 3):

P(A ∪ C) = P(A) + P(C) - P(A ∩ C) = 5/10 + 3/10 - 1/10 = **7/10 = 0.70**

Verificación directa: A ∪ C = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10} → 7 elementos ✓

Probabilidad de B ∪ C (mayor que 6 o múltiplo de 3):

P(B ∪ C) = P(B) + P(C) - P(B ∩ C) = 4/10 + 3/10 - 1/10 = **6/10 = 3/5 = 0.60**

Verificación directa: B ∪ C = {3, 6, 7, 8, 9, 10} → 6 elementos ✓

> La verificación directa (contar los elementos de la unión) es siempre una excelente herramienta para comprobar que el cálculo con la fórmula fue correcto. En problemas con espacios muestrales pequeños, este método sirve como validación.

✏ **Ejercicio:** Con los mismos eventos A, B y C definidos arriba, calcula P(A' ∩ B), es decir, la probabilidad de obtener un número que sea impar y mayor que 6. Luego verifica listando directamente los elementos de ese conjunto.

2.4 Experimento de Extracción con Dos Urnas

Ahora se considera un experimento más complejo: se tienen dos urnas. La urna 1 contiene 4 pelotas rojas y 6 pelotas azules. La urna 2 contiene 7 pelotas rojas y 3 pelotas azules. Se elige una urna al azar (con igual probabilidad) y se extrae una pelota.

Este escenario introduce la necesidad de trabajar con probabilidades condicionadas a la urna seleccionada.

Se definen:
- **U_1** = { Se elige la urna 1 }, con $P(U_1) = 1/2$
- **U_2** = { Se elige la urna 2 }, con $P(U_2) = 1/2$
- **R** = { La pelota extraída es roja }

Las probabilidades condicionales son:
- $P(R \mid U_1) = 4/10 = 2/5$
- $P(R \mid U_2) = 7/10$

Aplicando la **regla de la probabilidad total**:

$P(R) = P(R|U_1)\cdot P(U_1) + P(R|U_2)\cdot P(U_2) = (2/5)\cdot(1/2) + (7/10)\cdot(1/2) = 2/10 + 7/20 = 4/20 + 7/20 = **11/20 = 0.55**$

 Ejemplo práctico: Este modelo es análogo a situaciones reales como la detección de defectos en productos provenientes de dos líneas de producción distintas, o la probabilidad de encontrar cierto resultado en una prueba médica cuando el paciente puede provenir de dos poblaciones con distintas tasas de prevalencia.

Sección 3: Probabilidad Condicional — Fundamentos y Fórmula

3.1 Motivación Conceptual

Imaginemos que se extrae una pelota de la urna combinada del experimento anterior y se informa que la pelota es roja. Con esa nueva información, ¿cambia nuestra estimación sobre cuál urna fue seleccionada? La respuesta es sí, y precisamente para cuantificar ese cambio existe la probabilidad condicional.

En términos generales, la **probabilidad condicional** de un evento A dado que se sabe que ocurrió el evento B, denotada $P(A|B)$, representa la probabilidad revisada de A una vez que se incorpora la información de que B ya ocurrió. El espacio muestral efectivo se reduce de S a B.

La fórmula que define formalmente esta probabilidad es:

> $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$, con la condición de que $P(B) \neq 0$

Esta expresión puede leerse como: "de entre todos los resultados en que B ocurre, ¿qué fracción pertenece también a A?"

3.2 Propiedad Clave: Independencia Estadística

Dos eventos A y B se dicen **estadísticamente independientes** cuando la ocurrencia de uno no aporta ninguna información sobre el otro. Matemáticamente, esto equivale a que:

$P(A|B) = P(A)$ y $P(B|A) = P(B)$

Lo cual, al sustituir en la fórmula de probabilidad condicional, da lugar a la condición equivalente de independencia:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Esta propiedad es fundamental en el diseño de experimentos y en el análisis estadístico, ya que cuando los eventos son independientes, el cálculo de probabilidades conjuntas se simplifica enormemente.

 Curiosidad: La independencia estadística no implica independencia causal ni física. Dos eventos pueden ser estadísticamente independientes por razones puramente matemáticas, sin que exista ninguna relación de causa y efecto entre ellos. A la inversa, dos eventos causalmente relacionados no siempre resultan estadísticamente dependientes en todos los contextos.

3.3 Aplicación: Clasificación de Componentes en Control de Calidad

Un inspector de calidad en cierta organización manufacturera revisa un lote de **180 componentes electrónicos**, clasificándolos según dos criterios: si presentan un defecto de tipo mecánico y si presentan un defecto de tipo eléctrico. Los resultados se resumen en la siguiente tabla de contingencia:

	Sin defecto eléctrico	**Con defecto eléctrico**	**Total**
Sin defecto mecánico	120	20	140
Con defecto mecánico	25	15	40
Total	145	35	180

Interpretación de cada celda:

- 120 componentes no presentan ninguno de los dos tipos de defecto.
- 20 componentes tienen defecto eléctrico pero no mecánico.
- 25 componentes tienen defecto mecánico pero no eléctrico.
- 15 componentes presentan ambos tipos de defecto simultáneamente.

Se definen:
- **M** = { El componente tiene defecto mecánico }
- **E** = { El componente tiene defecto eléctrico }

3.4 Cálculo Completo de Probabilidades

Probabilidades marginales:

P(M) = 40/180 = 2/9 ≈ **0.222 (22.2%)**

P(E) = 35/180 = 7/36 ≈ **0.194 (19.4%)**

P(M ∩ E) = 15/180 = 1/12 ≈ **0.083 (8.3%)**

Probabilidad condicional P(E|M) — probabilidad de defecto eléctrico dado que hay defecto mecánico:

P(E|M) = P(M ∩ E) / P(M) = (15/180) / (40/180) = 15/40 = 3/8 = **0.375 (37.5%)**

Probabilidad condicional P(M|E) — probabilidad de defecto mecánico dado que hay defecto eléctrico:

P(M|E) = P(M ∩ E) / P(E) = (15/180) / (35/180) = 15/35 = 3/7 ≈ **0.429 (42.9%)**

Probabilidad de la unión P(M ∪ E) — componente con al menos un tipo de defecto:

P(M ∪ E) = P(M) + P(E) - P(M ∩ E) = 40/180 + 35/180 - 15/180 = 60/180 = 1/3 ≈ **0.333 (33.3%)**

> El hecho de que P(E|M) = 0.375 sea mayor que P(E) = 0.194 indica que los defectos mecánicos y eléctricos no son independientes: la presencia de un

defecto mecánico más que duplica la probabilidad de encontrar también un defecto eléctrico, lo que sugiere una causa común o un proceso de fabricación defectuoso que genera múltiples tipos de falla.

✏ **Ejercicio:** Verifica algebraicamente si los eventos M y E son estadísticamente independientes. Para ello, comprueba si $P(M \cap E) = P(M) \cdot P(E)$. ¿Qué concluyes?

Sección 4: Aplicación de la Regla de Adición en Distribuciones Laborales

4.1 Planteamiento

En cierta institución de servicios, el personal está distribuido en dos categorías de función (administrativa y operativa) y dos niveles de experiencia (con menos de 5 años y con 5 o más años). La siguiente tabla muestra la distribución completa:

	Menos de 5 años	**5 años o más**	**Total**
Función administrativa	28	22	50
Función operativa	35	15	50
Total	63	37	100

Si se selecciona al azar a un integrante del personal, se desea calcular la probabilidad de que desempeñe una función operativa o tenga 5 años o más de experiencia.

4.2 Resolución Paso a Paso

Se definen los eventos:
- **A** = { La persona desempeña una función operativa }
- **B** = { La persona tiene 5 años o más de experiencia }

Dado que una persona puede ser operativa y tener 5 o más años de experiencia simultáneamente, los eventos no son mutuamente excluyentes. Se aplica la fórmula general de la unión.

Paso 1:
$P(A) = 50/100 = **1/2**$

Paso 2:
$P(B) = 37/100 = **0.37**$

Paso 3:
$P(A \cap B) = 15/100 = **0.15**$

Paso 4 — Regla de adición:

$P(A \cup B) = 50/100 + 37/100 - 15/100 = 72/100 = **0.72 (72%)**$

 Nota aclaratoria: El valor 72/100 puede verificarse directamente: las personas que pertenecen a $A \cup B$ son todas las operativas (50) más las administrativas con 5 o más años (22), es decir, 50 + 22 = 72 personas. Esta verificación confirma que el cálculo es correcto.

4.3 Análisis de Probabilidades Condicionales en el Mismo Contexto

Con la misma tabla, se pueden responder preguntas condicionadas que aportan información relevante para la gestión del personal.

¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga 5 o más años de experiencia, dado que su función es administrativa?

P(B|A') = P(B ∩ A') / P(A')

P(A') = 50/100 (función administrativa)

P(B ∩ A') = 22/100 (administrativa con 5 o más años)

P(B|A') = 22/50 = **0.44 (44%)**

¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea de función operativa, dado que tiene menos de 5 años de experiencia?

P(A | B') = P(A ∩ B') / P(B')

P(B') = 63/100 (menos de 5 años)

P(A ∩ B') = 35/100 (operativa con menos de 5 años)

P(A | B') = 35/63 = 5/9 ≈ **0.556 (55.6%)**

 Ejemplo práctico: Este tipo de análisis es muy utilizado en recursos humanos para identificar si ciertas características (como la función o el nivel de experiencia) están asociadas entre sí dentro de una organización. Si las probabilidades condicionales difieren significativamente de las marginales, hay evidencia de dependencia entre variables.

Sección 5: La Regla de Bayes Aplicada a Diagnósticos

5.1 Problema de Clasificación Invertida

En muchas situaciones prácticas, se conoce la probabilidad de observar cierta evidencia dado un estado de las cosas, pero lo que realmente interesa es la probabilidad inversa: dado que se observó la evidencia, ¿cuál es el estado más probable?

Este tipo de razonamiento inverso es precisamente lo que formaliza el **Teorema de Bayes**:

> P(A|B) = [P(B|A) · P(A)] / P(B)

Donde P(B) puede calcularse mediante la regla de la probabilidad total si se conocen particiones exhaustivas del espacio muestral.

5.2 Aplicación: Evaluación de Dos Proveedores

Una organización recibe componentes de dos proveedores distintos. El proveedor X suministra el 60% de los componentes y el proveedor Y el 40% restante. Se sabe que el 5% de los componentes del proveedor X son defectuosos, mientras que el 10% de los del proveedor Y presentan defectos.

Se selecciona al azar un componente del inventario y resulta ser defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido suministrado por el proveedor Y?

Datos:
- P(X) = 0.60, P(Y) = 0.40
- P(D|X) = 0.05 (tasa de defectos del proveedor X)
- P(D|Y) = 0.10 (tasa de defectos del proveedor Y)

Paso 1 — Probabilidad total de encontrar un defecto:

P(D) = P(D|X)·P(X) + P(D|Y)·P(Y) = 0.05·0.60 + 0.10·0.40 = 0.03 + 0.04 = **0.07**

Paso 2 — Aplicar el Teorema de Bayes:

P(Y|D) = P(D|Y)·P(Y) / P(D) = (0.10·0.40) / 0.07 = 0.04 / 0.07 = 4/7 ≈ **0.571 (57.1%)**

> Aunque el proveedor Y solo aporta el 40% de los componentes, es responsable del 57.1% de los defectos encontrados. Esto se debe a su mayor tasa de defectos (10% frente a 5%), lo que hace que su "huella" entre los componentes defectuosos sea desproporcionadamente alta.

 Curiosidad: Este tipo de razonamiento está en la base del filtrado de correos no deseados (spam). Un algoritmo bayesiano aprende la probabilidad de que ciertas palabras aparezcan en mensajes de spam frente a mensajes legítimos, y luego usa el Teorema de Bayes para calcular la probabilidad de que un nuevo mensaje sea spam dado que contiene esas palabras.

✏ **Ejercicio:** Con los mismos datos del ejemplo, calcula P(X|D), es decir, la probabilidad de que el componente defectuoso sea del proveedor X. Verifica que P(X|D) + P(Y|D) = 1.

Sección 6: Distribución de Probabilidades en Experimentos Discretos

6.1 Concepto de Variable Aleatoria Discreta

Una **variable aleatoria** es una función que asigna un número real a cada resultado del espacio muestral. Cuando el conjunto de valores posibles es finito o contablemente infinito, se habla de una **variable aleatoria discreta**.

Por ejemplo, al extraer pelotas de una urna numerada, el número que figura en la pelota extraída es una variable aleatoria discreta. La distribución de probabilidades de esta variable asigna a cada valor posible su probabilidad correspondiente.

Para que una distribución de probabilidades sea válida, debe cumplir dos condiciones:

1. Cada probabilidad individual es mayor o igual a cero: P(X = x) >= 0 para todo x.
2. La suma de todas las probabilidades es igual a 1: la suma de P(X = x_i) para todos los valores posibles x_i es igual a 1.

6.2 Valor Esperado y Varianza

El **valor esperado** (o media) de una variable aleatoria discreta X, denotado E(X) o μ, es el promedio ponderado de todos sus valores posibles, usando las probabilidades como pesos:

E(X) = suma de [x_i · P(X = x_i)] para todos los valores posibles x_i

La **varianza** mide la dispersión de la distribución respecto a su media:

Var(X) = suma de [$(x_i - \mu)^2$ · P(X = x_i)] para todos los valores posibles x_i

Y la **desviación estándar** es la raíz cuadrada de la varianza:

DE(X) = raíz cuadrada de Var(X)

 Nota aclaratoria: El valor esperado no es necesariamente un valor que pueda ocurrir en el experimento. Por ejemplo, el valor esperado al lanzar un dado estándar es 3.5, pero 3.5 no es un resultado posible del dado. El valor esperado representa el promedio a largo plazo si el experimento se repite muchas veces.

6.3 Ejemplo: Distribución de la Suma de Dos Extracciones

Supóngase que se extrae con reposición dos veces de una urna que contiene pelotas numeradas del 1 al 4, cada una con igual probabilidad. El espacio muestral tiene 4 × 4 = 16 resultados equiprobables. La suma S de los dos números extraídos puede tomar valores de 2 a 8.

Suma S	Combinaciones	Cantidad	P(S)
2	(1,1)	1	1/16
3	(1,2), (2,1)	2	2/16
4	(1,3), (2,2), (3,1)	3	3/16
5	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	4	4/16
6	(2,4), (3,3), (4,2)	3	3/16
7	(3,4), (4,3)	2	2/16
8	(4,4)	1	1/16

Cálculo del valor esperado:

E(S) = 2·(1/16) + 3·(2/16) + 4·(3/16) + 5·(4/16) + 6·(3/16) + 7·(2/16) + 8·(1/16)

E(S) = (2 + 6 + 12 + 20 + 18 + 14 + 8) / 16 = 80/16 = **5**

> Este resultado es consistente con la propiedad de linealidad del valor esperado: E(S) = E(X_1) + E(X_2) = 2.5 + 2.5 = 5, donde E(X_i) = (1+2+3+4)/4 = 2.5 para cada extracción individual.

 Ejemplo práctico: Este modelo puede aplicarse a situaciones como calcular la puntuación esperada en un juego donde dos participantes aportan un número al azar entre 1 y 4, o estimar el tiempo total de dos procesos independientes que duran entre 1 y 4 unidades de tiempo cada uno.

Sección 7: Tabla Comparativa de Fórmulas y Conceptos Clave

7.1 Resumen de Fórmulas Fundamentales

Concepto	Fórmula	Condición de aplicación
Probabilidad clásica	P(A) = n(A) / n(S)	Resultados equiprobables
Complemento	P(A') = 1 - P(A)	Siempre
Unión general	P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)	A y B no excluyentes

Unión excluyente	P(A ∪ B) = P(A) + P(B)	A y B mutuamente excluyentes
Intersección independiente	P(A ∩ B) = P(A) · P(B)	A y B independientes
Probabilidad condicional	P(A|B) = P(A ∩ B) / P(B)	P(B) ≠ 0
Regla multiplicativa	P(A ∩ B) = P(A) · P(B|A)	Siempre
Probabilidad total	P(A) = suma de $P(A|B_i)\cdot P(B_i)$	B_i partición de S
Teorema de Bayes	$P(B_i|A) = P(A|B_i)\cdot P(B_i) / P(A)$	B_i partición de S
Valor esperado	E(X) = suma de $x_i \cdot P(X=x_i)$	Variable discreta

---

7.2 Errores Frecuentes y Cómo Evitarlos

Uno de los errores más comunes al trabajar con probabilidad condicional es confundir P(A|B) con P(B|A). Estas dos cantidades son distintas en general, y solo coinciden cuando P(A) = P(B). Un método para evitar este error es leer siempre la expresión P(A|B) de derecha a izquierda: "dado que ocurrió B, ¿cuál es la probabilidad de A?". El evento después de la barra vertical es el que ya ocurrió (la condición).

Otro error frecuente es aplicar la fórmula de unión para eventos mutuamente excluyentes olvidando restar la intersección cuando los eventos no lo son. Antes de aplicar la fórmula, siempre es recomendable preguntarse: ¿pueden ambos eventos ocurrir al mismo tiempo? Si la respuesta es sí, se debe restar P(A ∩ B).

 Nota aclaratoria: En tablas de contingencia, P(A ∩ B) siempre puede leerse directamente de la celda que corresponde a la intersección de la fila A y la columna B (o viceversa). No es necesario calcularlo mediante fórmulas cuando se tiene la tabla completa.

Sección 8: Ejercicios de Consolidación

8.1 Ejercicios de Espacio Muestral y Eventos

✏ **Ejercicio 1:** Una urna contiene 5 pelotas rojas, 4 pelotas azules y 3 pelotas verdes. Se extrae una pelota al azar. Define el espacio muestral considerando solo el color, y calcula la probabilidad de obtener una pelota que no sea roja.

✏ **Ejercicio 2:** De las 12 pelotas del ejercicio anterior, 6 están numeradas con números pares y 6 con números impares, distribuidas independientemente del color. Si se elige una pelota al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja o tenga un número par?

✏ **Ejercicio 3:** Se extraen dos pelotas en secuencia sin reposición de la urna del ejercicio 1. ¿Cuántos resultados posibles tiene el espacio muestral si se considera el orden? ¿Y si no se considera?

8.2 Ejercicios de Probabilidad Condicional

✏ **Ejercicio 4:** En una empresa, el 40% de los empleados tiene título universitario y el 25% tiene título universitario y habla un segundo idioma. Si se selecciona un empleado con título universitario, ¿cuál es la probabilidad de que hable un segundo idioma?

✏ **Ejercicio 5:** En un lote de 200 productos, 30 tienen defectos de color y 20 tienen defectos de forma. Si 8 tienen ambos tipos de defectos, ¿cuál es la probabilidad de que un producto seleccionado al azar tenga defecto de forma, dado que ya se sabe que tiene defecto de color?

8.3 Ejercicios de Regla de Bayes

✏ **Ejercicio 6:** En cierta región, el 70% de los días son soleados y el 30% son nublados. Cuando el día es soleado, la probabilidad de que un sistema de alerta se active es del 10%. Cuando está nublado, esa probabilidad sube al 40%. Si en un día determinado el sistema se activó, ¿cuál es la probabilidad de que el día sea nublado?

✏ **Ejercicio 7:** Dos cajas contienen pelotas de diferentes colores. La caja A tiene 6 rojas y 4 blancas. La caja B tiene 3 rojas y 7 blancas. Se elige una caja con igual probabilidad y se extrae una pelota que resulta ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya elegido la caja B?

Sección 9: Conexiones con Otras Áreas del Conocimiento

9.1 Probabilidad en Inteligencia Artificial y Aprendizaje Automático

Los conceptos desarrollados en este documento constituyen la base matemática de muchas técnicas de inteligencia artificial. Los modelos probabilísticos gráficos, como las redes bayesianas, utilizan la probabilidad condicional para representar relaciones de dependencia entre variables y realizar inferencias complejas. El clasificador Naive Bayes, ampliamente utilizado en categorización de texto, detección de spam y diagnóstico médico automatizado, aplica directamente el Teorema de Bayes asumiendo independencia condicional entre las características del problema.

9.2 Probabilidad en Epidemiología y Diagnóstico Clínico

En el campo de la salud, la probabilidad condicional es fundamental para interpretar resultados de pruebas diagnósticas. Los conceptos de sensibilidad (probabilidad de resultado positivo dado que la persona tiene la condición) y especificidad (probabilidad de resultado negativo dado que la persona no tiene la condición) son esencialmente probabilidades condicionales. El Teorema de Bayes permite combinar estos valores con la prevalencia de la enfermedad para obtener el valor predictivo positivo: la probabilidad de que una persona con resultado positivo realmente tenga la enfermedad.

 Curiosidad: Una de las aplicaciones más sorprendentes del Teorema de Bayes es la llamada "paradoja del test diagnóstico": incluso una prueba muy precisa puede tener un valor predictivo positivo bajo cuando la prevalencia de la enfermedad es muy pequeña. Por ejemplo, una prueba con 99% de sensibilidad y 99% de especificidad para una enfermedad con prevalencia del 0.1% tiene un valor predictivo positivo de apenas 9%: 9 de cada 10 resultados positivos serían falsos positivos.

Conclusión

A lo largo de este documento se ha trabajado de manera sistemática el análisis de experimentos de extracción aleatoria como punto de partida para introducir y aplicar los conceptos fundamentales de la teoría de probabilidad. Se demostró cómo construir tablas de contingencia y utilizarlas para calcular probabilidades marginales, conjuntas y condicionales, y cómo la regla de adición general permite tratar correctamente eventos que no son mutuamente excluyentes. La regla

de la probabilidad total y el Teorema de Bayes se presentaron como extensiones naturales que permiten abordar problemas de mayor complejidad, especialmente aquellos que involucran múltiples fuentes o causas posibles de un mismo evento.

El denominador común de todos los temas abordados es la necesidad de razonar con precisión sobre la incertidumbre: definir claramente los eventos, identificar las relaciones entre ellos y aplicar de manera consistente las fórmulas adecuadas. Este rigor conceptual, combinado con la interpretación contextual de los resultados, constituye la competencia esencial que desarrolla el estudio de la probabilidad.

> Razonar probabilísticamente no es simplemente aplicar fórmulas: es desarrollar la capacidad de pensar con claridad en presencia de información incompleta, una habilidad invaluable en cualquier campo profesional y en la vida cotidiana.